Musterlösung Übung 3,1

1) Es seien PQR und $P'Q'R'$ zwei Dreicke in der Ebene, die in Perspektive von einem Punkt S aus sind.

Es sei $PQ \parallel P'Q'$. Die folgenden Schnittpunkte mögen existieren:

$$Y = QR \cap Q'R', \quad Z = RP \cap R'P'.$$

Man beweise, dass $YZ \parallel PQ$.

Lösung mit darstellender Geometrie: Wir nehmen die Ebene als Projektionsebene und bezeichnen sie mit G. Wir betrachten die orthogonale Projektion des Raumes auf G. Wir nehmen eine Gerade h durch S, die nicht in G liegt und sich auf SRR' projeziert. Es seien $\tilde{R}$ und $\tilde{R}'$ die Punkte von h, die sich auf R und R' projezieren. Die Punkte $P, P', \tilde{R}, \tilde{R}'$ liegen in einer Ebene. Die Geraden $\tilde{R}P$ und $\tilde{R}'P'$ können nicht parallel sein, da es sonst den Punkt Z nicht geben würde. Also treffen sie sich in einem Punkt $\tilde{Z}$ der auf Z projeziert. Genauso treffen sich $\tilde{R}Q$ und $\tilde{R}'Q'$ in einem Punkt $\tilde{Z}$. Der Durchschnitt der beiden Dreiecksebenen $E = PQ\tilde{R}$ und $E' = P'Q'\tilde{R}'$ ist dann die Gerade $\tilde{Y}\tilde{Z}$. Da die Geraden $G \cap E = PQ$ und $G \cap E' = P'Q'$ parallel sind, gilt $G \cap E \cap E' = \emptyset$. Also schneiden sich die Geraden $G \cap E$ und $E' \cap E$ nicht. Aber diese Geraden liegen beide in der Ebene E. Also sind die Geraden $G \cap E = PQ$ und $E' \cap E = \tilde{Y}\tilde{Z}$ parallel und dann auch ihre Projektionen PQ und YZ auf G. $Q.E.D.$