

Geometrie, Übung 5

1) Formulieren und beweisen Sie den Kongruenzsatz SWS.

2) Es sei $\mathbb{A}$ ein euklidischer Raum der Dimension n . Es sei $P_0, \dots, P_n$ ein Rahmen von $\mathbb{A}$, d.h. die Punkte sind in keinem echten Unterraum enthalten. Es sei $Q_0, \dots, Q_n$ ein weiterer Rahmen.

Wir nehmen an, dass $|P_i P_j| = |Q_i Q_j|$ für alle $i, j \in [0, n]$. Man beweise, dass es genau eine Isometrie $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ gibt, so dass

$$f(P_i) = Q_i, \quad \text{für } i \in [1, n].$$

3) Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Eine Isometrie $\phi : V \rightarrow V$ mit $\det \phi = 1$ nennen wir eine Drehung. Was sind die Matrizen der Drehungen von $\mathbb{R}^2$? Im Fall $\dim V = 3$ hat jede Drehung eine Achse, d.h. es gibt eine Vektor $a \in V$, $a \neq 0$, so dass $\phi(a) = a$. Wieso?

Es sei $\dim V = 3$. Es seien $v, w \in V$ und $v', w' \in V$ zwei Paare linear unabhängiger Vektoren. Die Vektoren mögen alle die Länge 1 haben, d.h. sie liegen auf der Kugel.

Es sei $(v, w) = (v', w')$. Man zeige, dass es genau eine Drehung ϕ von V gibt, so dass $\phi(v) = v'$ und $\phi(w) = w'$.

4) Es sei $\mathbb{A}$ ein euklidischer Raum. Es seien P, Q zwei verschiedene Punkte. Man beweise, dass es genau eine Spiegelung s gibt, so dass $s(P) = Q$. Was sind die Fixpunkte dieser Spiegelung?

Abgabetermin: Donnerstag, den 20.11. 2014