Geometrie, Übung 6

1) Es sei $(\mathbb{A}, V)$ ein affiner Raum. Es sei $(f, \phi) : (\mathbb{A}, V) \rightarrow (\mathbb{A}, V)$ eine bijektive affine Abbildung. Es sei $v \in V$ und es sei $t_v : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ die Translation, d.h. $t_v(P) = P + v$.

Man beweise, dass

$$f \circ t_v \circ f^{-1} = t_{\phi(v)}.$$

2) Es sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension 2. Zwei geordnete Paare (u_1, v_1) und (u_2, v_2) von Vektoren der Länge 1 heißen äquivalent, wenn eine Drehung $\phi : V \rightarrow V$ existiert, so dass $\phi(u_1) = u_2$ und $\phi(v_1) = v_2$.

Es gibt Drehungen ψ_1 und ψ_2 , so dass $\psi_i(u_i) = v_i$ für $i = 1, 2$.

Beweisen Sie, dass $\psi_1 = \psi_2$. Definieren eine Abbildung von der Menge $\mathcal{D}$ der Drehwinkel nach $\text{SO}(V)$.

3) Die folgenden Aufgaben betreffen einen euklidischen Raum der Dimension 2. Es seien h bzw. k Homothetien mit den Fixpunkten I bzw. K . Es sei $h(A) = A'$ und $k(B) = B''$.

Man konstruiere den Fixpunkt der Homothetie $k \circ h$. (siehe Abbildung)

4) Wir bezeichnen mit $h = h(I, \lambda)$ die Homothetie mit dem Fixpunkt I , und so dass $h(\overrightarrow{A})h(\overrightarrow{B}) = \lambda \overrightarrow{AB}$.

Gegeben seien 3 Kreise $\mathcal{C}_i$, wo $i = 1, 2, 3$. Es gibt eine Homothetie $h(I_1, \lambda_1)$, die $\mathcal{C}_2$ auf $\mathcal{C}_3$ abbildet und so dass $\lambda_1 > 0$. Es gibt eine Homothetie $h(J_2, \mu_2)$, die $\mathcal{C}_3$ auf $\mathcal{C}_1$ abbildet und so dass $\mu_2 < 0$ und es gibt eine Homothetie $h(J_3, \mu_3)$ die $\mathcal{C}_1$ auf $\mathcal{C}_2$ abbildet und so dass $\mu_3 < 0$.

Man beweise, dass die Punkte I_1, J_2, J_3 auf einer Geraden liegen.

(Man benutze die Erkenntnisse aus Aufgabe 3).

Abgabetermin: Donnerstag, den 27.11.2014