Geometrie, Übung 7

1) Es sei V ein 2-dim. euklidischer Vektorraum. Wir fixieren eine orthnormale Basis f_1, f_2 von V. Dann haben wir in der Vorlesung Bijektionen definiert:

$$\mathcal{D} \to \mathrm{SO}(V) \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

wobei $\mathcal{D}$ die Menge der Drehwinkel bezeichnet. Es sei $\sphericalangle(u, v) \in \mathcal{D}$ und $\gamma \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ die assozierte Zahl.

Man beweise, dass

$$\cos\gamma = (u, v).$$

Hier steht rechts das Skalarprodukt.

2) (Fortsetzung von 1) Es sei det die eindeutig bestimmte Determinantenfunktion auf V, so dass $\det(f_1, f_2) = 1$. Man beweise, dass

$$\det(u, v) = \sin\gamma.$$

(Hinweis: Zuerst reduziere man das Problem auf den Fall, wo $V = \mathbb{R}^2$ und f_1, f_2 die Standardbasis ist und dann durch eine Drehung auf den Fall $f_1 = u$.)

3) Es seien Kreise K_1, K_2, K_3, K_4 in der Ebene gegeben. Die Kreise K_1 und K_2 mögen sich in 2 Punkten A und A' schneiden. Die Kreise K_2 und K_3 mögen sich in 2 Punkten B und B' schneiden. Die Kreise K_3 und K_4 mögen sich in 2 Punkten C und C' schneiden. Die Kreise K_4 und K_1 mögen sich in 2 Punkten D und D' schneiden. Ferner mögen die Punkte A', B', C', D' auf einem Kreis liegen.

Man beweise an Hand der Abbildung, dass die Punkte A, B, C, D auf einem Kreis liegen.

4) Es sei AB ein Sehne in einem Kreis K mit dem Mittelpunkt O. Es sei t die Tangente an K im Punkt B. Es sei $T \in t$ ein von B verschiedener Punkt.

Man beweise, dass

$$\sphericalangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \sphericalangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BT}).$$

Abgabetermin: Donnerstag, den 4.12.2014