Lineare Algebra, Übung 12

1) Wir betrachen die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Man addiere (-2)-mal die erste Zeile von A zur dritten Zeile. Dann erhält man eine Matrix A'. Man addiere 2-mal die 3.Spalte von A' zur 1.Spalte von A'. Dann erhält man die Matrix A''. Man finde die Matrix A'' und eine Matrix B, so dass

$$BAB^{-1} = A''.$$

2) Es sei $p : V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums, so dass $p^2 := p \circ p = p$. Man beweise, dass die Unterräume $\operatorname{Ker} p$ und $\operatorname{Im} p$ von V komplementär sind. Dazu beweise man, dass $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_V - p)$. (Hier ist der Endomorphismus $\mathrm{id}_V - p : V \to V$ definiert durch $(\mathrm{id}_V - p)(v) = \mathrm{id}_V(v) - p(v) = v - p(v)$.)

3) Es sei $\mathcal{P}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der Polynomfunktionen $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. Es sei $h(x) = x^3 + 4x^2 + 3x + 2 \in \mathcal{P}$. Es sei

$$U = \{f \cdot h \mid f \in \mathcal{P}\}.$$

Es sei $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}/U$ ein Faktorraum. Er hat die Basis

$$\bar{1} := \pi(1),\ \bar{x} := \pi(x),\ \bar{x}^2 := \pi(x^2). \tag{1}$$

Es sei $g \in \mathcal{P}$ und $\mu_g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ der Endomorphismus $f \mapsto g \cdot f$. Es sei $\bar{\mu}_g : \mathcal{P}/U \to \mathcal{P}/U$ die induzierte Abbildung auf dem Faktorraum. Man berechne die Matrix von $\bar{\mu}_{x^2}$ bezüglich der Basis (1).

4) Es sei K ein Körper. Es sei $\mathcal{P}_n$ die Menge aller Polynomfunktionen $f : K \to K$, die sich wie folgt schreiben lassen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad x \in K, \tag{2}$$

und wobei

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \dots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \in K^{n+1}. \tag{3}$$

Die lineare Abbildung $K^{n+1} \to \mathcal{P}_n$, $\underline{a} \mapsto f$ bezeichnen wir mit χ.

Es seien $x_0, x_1, \dots, x_n \in K$ verschiedene Elemente. Dann definert man eine lineare Abbildung $\epsilon : \mathcal{P}_n \to K^{n+1}$:

$$\epsilon(f) = \begin{pmatrix} f(x_n) \\ f(x_{n-1}) \\ \dots \\ f(x_1) \\ f(x_0) \end{pmatrix} \in K^{n+1}$$

Man beweise, dass ϵ und χ Isomorphismen sind.

Um zu beweisen, dass ϵ surjektiv ist, benutze man die Lagrangepolynome:

$$u_i(x) := \prod_{j \in [0,n], j \neq i} (x - x_j) \in \mathcal{P}_n.$$

Abgabe bis Donnerstag, 7.7.2016, 14:00