Lineare Algebra II, Übung 13

1) Es sei $\phi \in \mathbb{R}$. Wir betrachen die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Man betrachte die Matrix als eine lineare Abbildung $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Man finde die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $e^{\pm \mathbf{i}\phi}$. Man finde eine Matrix $C \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$, die invertierbar ist und so dass

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} e^{\mathbf{i}\phi} & 0 \\ 0 & e^{-\mathbf{i}\phi} \end{pmatrix}$$

Man wähle C, so dass es unabhängig von ϕ ist.

2) Man betrachte den Endomorphimus des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^4$, dessen Matrix in der Standardbasis wie folgt aussieht:

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 & 3 \\ 2 & 8 & 1 & -1 \\ 2 & 13 & -4 & -1 \\ 4 & 23 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Man finde einen Eigenwert λ und einen Eigenvektor im Hauptraum zu λ. (vgl. Aufgabe 4)

3) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Man finde eine Matrix C, so dass

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(Man kann die Rechnungen aus der Vorlesung benutzen)

4) Es sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich erzeugten Vektorraums über einem Körper K. Es sei $v \in V$, $v \neq 0$ ein Vektor. Man beweise, dass es ein Polynom

$$P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_1 T + a_0$$

gibt, so dass $n \geq 1$ und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$ und so dass P die folgende Eigenschaft hat:

Es gilt $P(f)(v) = 0$, und wenn $Q(T)$ ein weiteres Polynom mit $Q(f)(v) = 0$ ist, so ist P ein Teiler des Polynoms Q. (Man verwende Satz 21 aus der Einführung zum LA-Skript.)

In der Situation von Aufgabe 2 sei $v = e_1$ der erste Standardvektor. Was ist das Polynom P?

Abgabe bis Donnerstag, 27.10.2016, 14:00