Lineare Algebra II, Übung 14

1) Es sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich erzeugten Vektorraums über K. Es sei $U \subset V$ eine endlich erzeugter Unterraum, der f-invariant ist, d.h. $f(U) \subset U$. Es sei $\lambda \in K$. Wir bezeichnen mit $V(\lambda)$ bzw. $U(\lambda)$ die Haupträume von f bzw. $f_{|U}$.

Man beweise, dass $U(\lambda) = U \cap V(\lambda)$.

2) Für die Matrix aus der Aufgabe 2) auf dem letzten Übungszettel bestimme man sämtliche Eigenwerte und die Dimensionen der Haupträume.

3) Die folgende Matrix ist nilpotent.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation mit A ist eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Finden Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ in der die Matrix von f eine obere Dreiecksmatrix ist und eine Basis in der die Matrix von f eine untere Dreiecksmatrix ist.

4) Es sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich erzeugten Vektorraums. Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die Eigenwerte und $V(\lambda_1), \ldots, V(\lambda_r)$ die Haupträume. Dann hat man eine Zerlegung in f-invariante Unterräume:

$$V = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus V(\lambda_r) \oplus W.$$

Man beweise, dass

$$\mathrm{Tr}(f|V) = (\dim V(\lambda_1))\lambda_1 + \ldots + (\dim V(\lambda_r))\lambda_r + \mathrm{Tr}(f|W).$$

($\mathrm{Tr}(f|W)$ bezeichnet die Spur der Einschränkung des Endomorphismus f auf W.)

Abgabe bis Donnerstag, 3.11.2016, 14:00