Lineare Algebra II, Übung 15

1) Es sei $f : V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus eines endlich erzeugten Vektorraums. Wir wählen eine Basis wie in Korollar 31. Es sei s_m die Anzahl der Indexe $i \in [1, t]$ so dass $\ell_i = m$.

Man beweise, dass

$$\dim \operatorname{Ker} f = \textstyle\sum_{m \geq 0} s_m,$$
$$\dim \operatorname{Ker} f^n - \dim \operatorname{Ker} f^{n-1} = \textstyle\sum_{m \geq n} s_m, \quad \text{für } n \geq 2.$$

2) Die folgende Matrix ist nilpotent:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & -5 \\ 9 & -9 & 3 & -9 \\ -3 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Man überprüfe das, in dem man die Potenzen berechnet. Es gibt eine Basis von $\mathbb{R}^4$ wie in Korollar 31. Wie groß ist t und wie groß sind die ℓ_i. Man schreibe A in dieser Basis. (Man benutze die Formel aus Aufgabe 1. Man braucht diese Basis nicht zu finden.)

3) Man beweise, dass eine nilpotente Abbildung $f : V \to V$, die diagonalisierbar ist, die Nullabbildung sein muss. Man folgere, dass die folgende Matrix nicht diagonalisierbar ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Man gebe ein Beispiel für zwei nilpotente Endomorphismen $f, g : V \to V$ eines Vektorraumes V, so dass $f + g$ nicht nilpotent ist.

Abgabe bis Donnerstag, 10.11.2016, 14:00