Lineare Algebra II, Übung 16

1) Es sei U ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Es seien $u_1, \ldots, u_d \in U$ linear unabhängige Vektoren. Man beweise, dass die folgenden Vektoren

$$u_1, \ldots, u_d, \mathbf{i}u_1, \ldots, \mathbf{i}u_d$$

linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind. (D.h. sie sind linear unabhängig in dem $\mathbb{R}$-Vektorraum U).

2) Die folgende Matrix definiert eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Es ist $f(\underline{x}) = A\underline{x}$. Man sagt A hat einen Eigenvektor, wenn f einen hat u.s.w. Diese Matrix A hat den Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man beweise, dass die lineare Abbildung $f_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ diagonalisierbar ist. Man beweise, dass es eine Basis von $\mathbb{R}^3$ gibt, in der die Matrix von f folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

wobei $e, a, b \in \mathbb{R}$. Man bestimme die Zahlen a, b, e. Man beweise, dass f nicht diagonalisierbar ist.

3) Es sei U ein komplexer Vektorraum. Eine Antiinvolution ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\alpha : U \to U$, so dass für $z \in \mathbb{C}$ und $u \in U$:

$$\alpha(zu) = \bar{z}\alpha(u), \quad \text{und} \quad \alpha^2 = \mathrm{id}_U .$$

Wenn wir U als $\mathbb{R}$-Vektorraum ansehen, bezeichen wir ihn mit $\breve{U}$. Man beweise, dass die lineare Abbildung $\alpha : \breve{U} \to \breve{U}$ diagonalisierbar ist. Man finde die Dimension der Eigenräume. (Hinweis: Wenn $u \in \breve{U}$ ein Eigenvektor ist, so auch $\mathbf{i}u$.)

4) Es sei V ein endlich erzeugter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Es sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Man nennt f halbeinfach, wenn $f_{\mathbb{C}}$ diagonalisierbar ist.

Es sei f ein beliebiger Endomorphismus. Man beweise, dass man f als eine Summe schreiben kann:

$$f = f_s + f_n,$$

wobei f_s ein halbeinfacher Endomorphismus von V ist und f_n ein nilpotenter Endomorphismus von V und so dass $f_s \circ f_n = f_n \circ f_s$.

(Hinweis: Man wende auf die Jordanzerlegung für $f_{\mathbb{C}}$ die komplexe Konjugation an. (Skript Satz 44, Seite 39))

Abgabe bis Donnerstag, 17.11.2016, 14:00