Lineare Algebra II, Übung 17

1) Es sei $G \in M(m \times n, K)$ eine Matrix. Sie definiert eine Bilinearform

$$\beta : K^m \times K^n \rightarrow K,$$

so dass

$$\beta(\underline{y}, \underline{x}) = {}^t \underline{y} G \underline{x}. \quad \underline{y} \in K^m, \quad \underline{x} \in K^n.$$

Man beweise, dass der Nullraum $W_0 \subset K^n$ von G bezüglich dem zweiten Faktor K^n der Kern der linearen Abbildung $K^n \rightarrow K^m, \underline{x} \mapsto G\underline{x}$ ist.

Man gebe eine entsprechende Beschreibung des Nullraums $V_0 \subset K^m$ bezüglich des ersten Faktors. Man folgere aus Satz 84, dass

$$\text{Zeilenrang } G = \text{Spaltenrang } G.$$

2) Es sei G wie in Aufgabe 1. Man beweise, dass es eine Basis $v_1, v_2, \dots, v_m$ von K^m und eine Basis $w_1, w_2, \dots, w_n$ von K^n gibt, so dass für eine Zahl r mit $r \leq m, r \leq n$ gilt:

$$G(v_i, w_i) = 1, \quad \text{für } 1 \leq i \leq r$$

und $G(v_i, w_j) = 0$ für alle übrigen Paare $(i, j) \in [1, m] \times [1, n]$. Hinweis: Wenn man auf G eine Zeilenoperation oder eine Spaltenoperation anwendet, so erhält man eine Matrix G' , die zu G im Sinne der Vorlesung kongruent ist.

3) Es sei V ein Vektorraum. Es sei V^* der duale Vektorraum. Es sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V und es sei $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n$ die duale Basis von V^* . Es sei $\lambda \in K$. Wir betrachten die Scherung

$$v_1 + \lambda v_2, v_2, v_3, \dots, v_n. \tag{1}$$

Man schreibe die Vektoren in der dualen Basis zu (1) als Linearkombinationen von $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n$.

4) Es sei $B : V \times W \rightarrow K$ eine Bilinearform. Es seien $V_0 \subset V$ und $W_0 \subset W$ die Nullräume. Dann existieren Komplementäräume $V' \subset V$ und $W' \subset W$:

$$V = V_0 \oplus V', \quad W = W_0 \oplus W'$$

Dann definiert man die Bilinearform $B' : V' \times W' \rightarrow K$ durch $B'(v', w') = B(v', w')$, für $v' \in V'$ und $w' \in W'$. (Man nennt B' die Einschränkung von B .)

Man beweise, dass B' in beiden Faktoren nichtausgeartet ist.

Abgabe bis Donnerstag, 24.11.2016, 14:00