Lineare Algebra II, Übung 19

Es sei stets K ein Körper, so dass $2K \neq 0$.

1) Man entscheide, ob die folgende Funktion auf $\mathbb{R}^3$ negative Werte annehmen kann:

$$Q(x_0, x_1, x_2) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

Dazu finde man die Sylvestersche Normalform durch quadratische Ergänzung oder notfalls auch anders.

2) Es sei $B : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform, die nicht identisch 0 ist. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Die Gramsche Matrix $G = B(v_i, v_j)$ sei gegeben.

Man zeige, dass man durch eine Vertauschung der Basiselemente und eine Scherung erreichen kann, dass $B(v_1, v_1) \neq 0$.

3) Es sei (V, B) ein endlich erzeugter K-Vektorraum V mit einer symmetrischen Bilinearform $B : V \times V \to K$. Ein Vektor $v \in V$ heißt *isotrop*, wenn $v \neq 0$ und $B(v, v) = 0$.

Es sei B nichtausgeartet und es sei $v \neq 0$ ein isotroper Vektor. Man beweise, dass es einen isotropen Vektor $u \in V$ gibt, so dass $B(u, v) = 1$.

4) Es sei $S \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, die positiv definit ist. Man beweise, dass der größte Eintrag der Matrix S auf der Diagonale steht.

Abgabe bis Donnerstag, 8.12.2016, 14:00