Lineare Algebra II, Übung 20

1) Es sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung eines K-Vektorraumes V.

Man beweise: Wenn jeder Vektor $v \in V$, $v \neq 0$ ein Eigenvektor für f ist, so gilt $f = \lambda \, \mathrm{id}_V$.

2) Es sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Es seien B_1 und B_2 zwei nicht ausgeartete Bilinearformen auf V. Für beliebige Vektoren $v, w \in V$ möge gelten:

$$B_1(v, w) = 0 \quad \text{gdw.} \quad B_2(v, w) = 0$$

Man beweise, dass es ein $\lambda \in K$ gibt, so dass für alle $v, w \in V$

$$B_2(v, w) = \lambda B_1(v, w).$$

(Man benutze das Resultat von Aufgabe 1.)

3) Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Es sei W die lineare Hülle der folgenden Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man finde eine Basis von $W^\perp$. (Man ergänze die Vektoren zu einer Basis das $\mathbb{R}^4$ und verwende das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren. siehe Skript Seite 99)

4) Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Die Matrix

$$U = (1/30) \begin{pmatrix} 20 & 4 & 22 \\ 20 & 10 & -20 \\ -10 & 28 & 4 \end{pmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Das ist eine Drehung.

Was ist die Achse dieser Drehung und was ist der Kosinus des Drehwinkels?

Abgabe bis Donnerstag, 15.12.2016, 14:00