

Lineare Algebra II, Übung 21

1) Es sei K ein Körper, so dass $2 \neq 0$. Es sei V ein K -Vektorraum. Es sei $B : V \times V \rightarrow K$ eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform, $f : V \rightarrow K$ eine lineare Abbildung und $c \in K$. Es sei $Q \subset V$ die Teilmenge aller Vektoren $v \in V$, so dass

$$B(v, v) + f(v) + c = 0. \quad (1)$$

Man beweise, dass es einen Vektor $w_0 \in V$ gibt, so dass $f(v) = 2B(v, w_0)$. Man finde $c_0 \in K$, so dass

$$B(v + w_0, v + w_0) + c_0 = 0.$$

genau dann, wenn $v \in Q$. Es sei $Q_0 = \{u \in V \mid B(u, u) - c_0 = 0\}$. Dann gilt $Q = Q_0 - w_0$.

Es sei $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2$. Man finde w_0 und c_0 , wenn die Gleichung (1) die folgende Form hat.

$$3x^2 + 2xy + 5y^2 + 6x - 1 = 0.$$

2) Man berechne den Abstand der folgenden beiden affinen Unterräume A_1 und A_2 des $\mathbb{R}^4$:

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Vergleiche Aufgabe 20, 3.)

3) Es seien v_1, w_1 zwei Vektoren in einem euklidischen Vektorraum. Der Winkel $\phi_1 = \angle(v_1, w_1)$ zwischen diesen Vektoren ist definiert durch

$$\cos \phi_1 = \frac{(v_1, w_1)}{|v_1| \cdot |w_1|}.$$

Es seien $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ Vektoren der Länge 1. Es sei $\angle(v_1, w_1) = \angle(v_2, w_2)$.

Man beweise, dass es eine Isometrie $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt, so dass $\alpha(v_1) = v_2$ und $\alpha(w_1) = w_2$. (Hinweis: Man kann versuchen v_1, w_1 bzw. v_2, w_2 jeweils so zu einer Basis zu ergänzen, dass die Gramsche Matrix des Standardskalarprodukts in diesen beiden Basen diegleiche ist.)

4) Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Bilinearform $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, welche durch die folgende Gramsche Matrix gegeben ist:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dann ist $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum.

Man berechne die orthogonale Projektion des Standardvektors e_3 auf $\mathcal{L}(e_1, e_2)$ in diesem euklidischen Vektorraum.

Abgabe bis Donnerstag, 22.12.2016, 14:00