Lineare Algebra II, Übung 22

1) Man bringe die folgende Matrix allein durch Spaltenscherungen erst auf obere Dreiecksform und dann auf untere Dreiecksform. Was ist die Determinante dieser Matrix?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Es sei $A \in M(n \times n, K)$. Die Summe der Elemente auf der Hauptdiagonale von A nennt man die Spur $\operatorname{Tr} A$ von A. Es seien $v_1, \ldots, v_n \in K^n$ beliebige Vektoren. Man beweise die Formel:

$$\det(Av_1, v_2, \ldots, v_n) + \det(v_1, Av_2, v_3, \ldots, v_n) + \ldots + \det(v_1, \ldots, v_{n-1}, Av_n) \\ = \operatorname{Tr} A \det(v_1, \ldots, v_n)$$

(Man zeige zuerst, dass die linke Seite der Gleichung eine alternierende Multilinearform in $v_1, \ldots, v_n$ ist.)

3) Man betrachte das Parallelogramm im $\mathbb{R}^3$, welches von den folgenden Vektoren aufgespannt wird:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Was ist der Flächeninhalt ? (Man kann das auf die Berechnung eines Volumens zurückführen.)

4) Es seien $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^2$ Vektoren. Man beweise die Relation:

$$\det(\underline{u}, \underline{v})\underline{w} + \det(\underline{v}, \underline{w})\underline{u} + \det(\underline{w}, \underline{u})\underline{v} = 0$$

Abgabe bis Donnerstag, 12.1.2017, 14:00