Lineare Algebra II, Übung 23

1) Man berechne die Determinante der folgenden Matrix auf drei verschiedene Weisen.

a) Man schreibe den Entwicklungssatz nach der zweiten Spalte auf.

b) Man schreibe die Leibnizformel aus.

c) Man bringe der Matrix durch Zeilen und Spaltenscherungen auf Dreiecksform.

$$\begin{pmatrix} 5 & 11 & 10 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Es sei $(\ ,\ )$ das Standardskalarprodukt auf K^3. Seine Gramsche Matrix bezüglich der Standardbasis ist die Einheitsmatrix.

Es sei $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ eine Basis von K^3, so dass

$$(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_j) = \delta_{ij}, \quad \text{Kroneckersymbol.}$$

Es sei $\det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = 1$. Man beweise, dass für das Vektorprodukt gilt

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_3, \quad \mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1, \quad \mathbf{n}_3 \times \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2.$$

3) Mit den Bezeichnungen der letzten Übung seien $u, v, w, z \in K^3$. Man beweise die Formel

$$((u \times v), (w \times z)) = \det \begin{pmatrix} (u,w) & (v,w) \\ (u,z) & (v,z) \end{pmatrix}.$$

4) Man berechne die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 8 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 8 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 8 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 2 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 2 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 2 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 2 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 2 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Hier verbirgt sich eine Matrix vom Rang 1.)

Abgabe bis Donnerstag, 19.1.2017, 14:00