

## Implizite Funktionen

Es sei  $\xi \in \mathbb{R}^m$ . Es sei  $m > n$ . Gegeben sei eine differenzierbare Funktion

$$\phi : (\mathbb{R}^m, \xi) \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Wir schreiben für  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  und  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ :

$$\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

Es sei  $\eta = \phi(\xi) \in \mathbb{R}^n$ . Wir sagen, dass die Gleichungen

$$\phi_i(x) = \eta_i, \quad i = 1, \dots, n$$

nach den Variablen  $x_1, \dots, x_n$  aufgelöst werden können, wenn eine Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^m$  von  $\xi$  existiert, so dass die Projektion  $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_{n+1}, \dots, x_m)$  eine Bijektion induziert:

$$U \cap \{x \in \mathbb{R}^m \mid \phi(x) = \eta\} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{m-n}, \quad (2)$$

wobei  $V$  eine Umgebung von  $(\xi_{n+1}, \dots, \xi_m)$  ist. Die Umkehrfunktion  $\psi$  zu (2) hat die Form:

$$\psi(x_{n+1}, \dots, x_m) = (\psi_1(x_{n+1}, \dots, x_m), \dots, \psi_n(x_{n+1}, \dots, x_m), x_{n+1}, \dots, x_m).$$

**Proposition 0.1** *Gegeben sei eine Funktion (1). Wir nehmen an, dass die partiellen Ableitungen  $(\partial\phi/\partial x_i)$  in einer Umgebung von  $\xi$  existieren und stetig sind. Es sei*

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(\xi), & \dots & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_n}(\xi) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\phi_n}{\partial x_1}(\xi), & \dots & \frac{\partial\phi_n}{\partial x_n}(\xi) \end{pmatrix} \neq 0.$$

*Dann kann das Gleichungssystem*

$$\phi(x) = \eta$$

*nach den Variablen  $(x_1, \dots, x_n)$  aufgelöst werden. Es gibt also eine Bijektion (2). Die Funktionen  $\psi_1(x_{n+1}, \dots, x_m), \dots, \psi_n(x_{n+1}, \dots, x_m)$  haben in allen Punkten von  $V$  stetige partielle Ableitungen.*

**Beweis:** Man kann das auf den Satz über die Umkehrfunktion zurückführen: Dazu betrachtet man die Abbildung

$$\tilde{\phi} : (\mathbb{R}^m, \xi) \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

so dass

$$\tilde{\phi}(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x), x_{n+1}, \dots, x_m).$$

Die Determinante der Jacobischen Matrix von  $\tilde{\phi}$  im Punkt  $\xi$  ist ungleich 0. Also findet man eine Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^m$  von  $\xi$  und eine Umgebung  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$  von  $(\eta_1, \dots, \eta_n, \xi_{n+1}, \dots, \xi_m)$ , so dass  $\tilde{\phi} : U \rightarrow \tilde{U}$  bijektiv ist und die Umkehrabbildung differenzierbar. Wenn man  $\tilde{U}$  verkleinert, kann man annehmen, dass  $\tilde{U} = W \times V$ , so  $W \subset \mathbb{R}^n$  eine Umgebung von  $\eta$  ist und  $V \subset \mathbb{R}^{m-n}$  eine Umgebung von  $(\xi_{n+1}, \dots, \xi_m)$ . Das Urbild von  $\eta \times V$  bei  $\tilde{\phi}$  ist dann  $U \cap \{x \in \mathbb{R}^m \mid \phi(x) = \eta\}$ . Damit erhält man die gewünschte Bijektion (2). Die Funktionen  $\psi_i(x_{n+1}, \dots, x_m)$  erhält man durch die Einschränkung der Umkehrfunktion  $\tilde{\phi}$  auf  $\eta \times V$ . Daher sind diese Funktionen differenzierbar.